

UDC 681.5:519.24

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИАЛЬТЕРНАТИВНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ**

Д. А. Дёмин

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ІНЕРЦІЙНИМИ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ НА ОСНОВІ МУЛЬТІАЛЬТЕРНАТИВНОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО ОПИСУ КІНЦЕВОГО СТАНУ**

Д. О. Дьомін

**SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL OVER INERTIAL TECHNOLOGICAL PROCESSES BASED ON A MULTIALTERNATIVE PARAMETRIC DESCRIPTION OF THE FINAL STATE**

D. Demin

*Запропоновано метод пошуку оптимального за швидкодією і кінцевим станом управління технологічними процесами, заснований на ... Отримані при реалізації даного методу рішення повністю узгоджуються з результатами, що отримуються із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна для задачі про швидкодію. Однак завдяки використанню в даному методі ... відкриваються додаткові можливості у вирішенні завдання ... Особливо слід відзначити, що при цьому спрощується процедура математичного конструювання оптимального управління технологічними процесами, що володіють властивостями істотної інерційності. Дані факти підтверджені результатами чисельного моделювання, які показали, що .....*

*Запропоновано та обґрунтовано два альтернативних варіанти реалізації управління, що відрізняються принципом вибору моментів перемикання управління. Показано, що визначальним фактором для вибору оптимального управління в цьому випадку є початковий стан системи щодо лінії кінцевого стану. Це зв'язано з тим, що ... Розроблено процедуру мультіальтернативного параметричного опису кінцевого стану, яка заснована на ... Такий підхід дозволяє ... Обґрунтуванням цього твердження може бути ... Показано, що в цьому випадку кожна з альтернатив є .... Завдяки цьому забезпечується можливість синтезу оптимального за швидкодією і кінцевим станом*

управління інерційними технологічними процесами в умовах мультиальтернативності опису кінцевого стану технологічної системи

**Ключові слова:** оптимальне керування технологічними процесами, принцип максимуму Понтрягіна, мультиальтернативний опис кінцевого стану,...

*Предложен метод* поиска оптимального по быстрдействию и конечному состоянию управления технологическими процессами, *основанный на ...* Полученные при реализации данного метода решения полностью согласуются с результатами, получаемые с применением принципа максимума Понтрягина для задачи о быстродействии. Однако *благодаря использованию в данном методе... открываются* дополнительные *возможности* в решении задачи ... *Особенно следует отметить, что* при этом упрощается процедура математического конструирования оптимального управления технологическими процессами, обладающими свойствами существенной инерционности. *Данные факты подтверждены результатами численного моделирования, показавшими что*.....

*Предложены и обоснованы* два альтернативных варианта реализации управления, отличающиеся принципом выбора моментов переключения управления. *Показано, что* определяющим фактором для выбора оптимального управления в этом случае является начальное состояние системы относительно линии конечного состояния. *Это связано с тем, что*...

*Разработана* процедура мультиальтернативного параметрического описания конечного состояния, *основанная на ..... Такой подход позволяет*...

*Обоснованием этого утверждения может быть*... *Показано, что в этом случае* каждая из альтернатив представляет собой .... *Благодаря этому обеспечивается возможность* синтеза оптимального по быстрдействию и конечному состоянию управления инерционными технологическими процессами в условиях мультиальтернативности описания конечного состояния технологической системы

**Ключевые слова:** оптимальное управление технологическими процессами, принцип максимума Понтрягина, мультиальтернативное описание конечного состояния, ...

## 1. Введение

**Поиск** оптимального управления для конкретных технических приложений **требует обоснованного выбора** наиболее целесообразных для данных объектов **методов**. Говоря об управлении промышленными объектами и соответствующими технологическими процессами, **необходимо учитывать, что**

такой выбор должен предполагать возможность учета ряда неопределенностей.

В этой связи нельзя не отметить одно интересное обстоятельство. Несмотря на ... очень востребованными являются методы .... Подтверждением этому могут быть труды, посвященные ... [1–3], ... . Получаемые с применением этих методов решения позволяют..., однако при условии... Это свидетельствует о том, что тематика исследований, посвященных .... является актуальной.

## 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

В исследовании [4] показано, что поиск оптимального управления... вызывает необходимость учитывать ... . При этом разработка модели объекта управления рассматривается как ... Понятно, что структура подобного функционала отображает взаимосвязи, процессы, характеристики и параметры энергоэкономического и управленческого характера. В сочетании с разработкой критерия эффективности использования ресурсов, как составляющей критерия оптимальности управления, это позволяет ... Однако предложенное в данной работе описание функционала не учитывает... Это приводит к тому, что при попытке его использования для управления инерционными объектами возникают объективные трудности. Они, в частности, связаны с... Это накладывает определенные ограничения на использование предложенных в [4] решений. Описание таких ограничений может быть найдено в работе [5], посвященной именно учету инерционности. Используемый в ней подход к идентификации объекта управления, обладающего большой инерционностью, базируется на построении адаптивного алгоритма расчета... Применение этого алгоритма позволяет обойти ограничения, накладываемые.... Поэтому полученные в работе [5] решения обеспечивают возможность.... Тем не менее, несмотря на преимущества такого алгоритма, остается открытым вопрос... Он особенно актуален для класса объектов, которые...

Развитие взглядов на моделирование таких объектов может быть найдено в работе [6], в которой показано, что ... . Несмотря на очевидно правильное выявление такой проблемы и рекомендации относительно ..., математический аппарат и алгоритмы его реализации ... приведен в работе [6] лишь концептуально. Автор работы ограничивается приведением условной схемы взаимодействия с типовой АСУ ТП, а также общим представлением математического аппарата и самой информационно-управляющей системы.

Систематизация результатов приведенных исследований позволяет считать, что существующие подходы к решению проблемы ... опираются на .... Иными словами, предполагается, что ....., причем этот вывод справедлив и для .... . Очевидно, подобные подходы позволяют находить приемлемые решения только в том случае, если конечное состояние процесса известно с заданной степенью точности, а его математическое описание имеет вид.... Из этого следует, что нарушение данных условий не даст возможности получения

оптимальных решений для систем управления объектами.... **Данная часть проблемы может быть решена путем** разработки процедуры синтеза оптимального по критериям... управления технологическими процессами, **базирующейся на** получении мультальтернативного описания конечного состояния.

### **3. Цели и задачи исследования**

Целью работы является исследование возможности синтеза оптимального по быстродействию и конечному состоянию управления технологическими процессами в случае наличия альтернатив в описании конечного состояния системы.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

– проверить возможность поиска оптимального управления, опираясь лишь на анализ системы дифференциальных уравнений, описывающей математическую модель объекта управления;

– разработать алгоритм описания конечного состояния системы – управляемого технологического системы дифференциальных уравнений, описывающей математическую модель объекта управления процесса;

– предложить схему практической реализации полученных решений на базе типовых информационно-управляющих систем в структуре АСУ ТП инерционными технологическими процессами.

### **4. Исследование решений системы дифференциальных уравнений, описывающей математическую модель объекта управления**

....

Для ответа на вопрос о возможности получения более простого решения, целесообразно рассмотреть систему вида

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad t \geq 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad (1)$$

где  $x_1(t)$  – координата материальной точки,  $x_2(t)$  – скорость перемещения материальной точки,  $u(t)$  – управление.

СДУ вида (1) – математическая модель объекта управления и при начальных условиях  $x_1(0) = x(0)$ ,  $x_2(0) = \dot{x}(0)$  и конечном состоянии  $x_1(T) = x_2(T) = 0$ ,  $T \rightarrow \min$ , задача поиска оптимального управления известна как задача об успокоении материальной точки [37]. Ее решение с применением принципа максимума Понтрягина представлено на рис. 1.

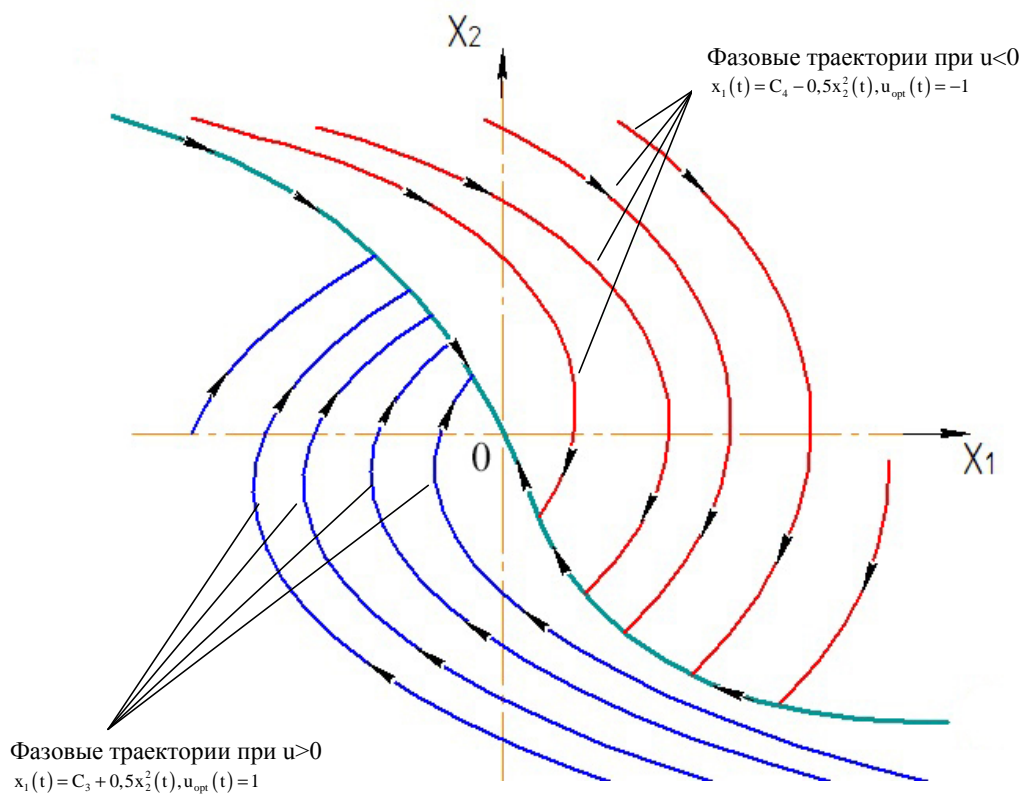


Рис. 1. Решение задачи об успокоении материальной точки с применением принципа максимума Понтрягина:  $u_{opt}(t) = \text{sign}(-C_1t + C_2)$ ,  $u_{opt}(t)$  – оптимальное управление,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные интегрирования

На основании полученных результатов синтеза управления для двух вариантов может быть проведено их сравнение и сделан выбор в пользу того, который обеспечивает лучшие показатели по стабилизации объекта. Последние могут оцениваться, например, временем пребывания объекта (технологической системы) внутри допустимой области конечного состояния.

## 5. Синтез мультальтернативного описания конечного состояния системы в задаче поиска оптимального управления

Выбор конечного состояния однозначно зависит от решаемой задачи и применительно к управлению технологическими процессами должен учитывать требования, предъявляемые в конкретных условиях. Определяющим является наличие качественной математической модели объекта управления, поэтому проблемам математического моделирования для конкретных технологических задач уделяется особое внимание. Описание ряда таких прикладных исследований может быть найдено:

– в работах [41, 42], посвященных моделированию для поиска оптимального управления процессами бурения;

– в работах [43–45], посвященных моделированию и управлению в технологиях выращивания кристаллов;

– в работах [46–48], посвященных моделированию и идентификации контролируемых объектов с использованием анализа интервальных множеств и исследованиям сходимости решения экстремальной задачи при ограничениях.

Все они объединены общим представлением о том, что моделирование и управление реальными объектами сопряжены с преодолением объективных трудностей, вызванных нечетким описанием и необходимостью учета существенной, зачастую многоуровневой, неопределенности. Некоторые обобщения таких задач могут быть найдены в работе [49], а общие принципы решения их решения – в работе [50].

В том случае, если адекватная математическая модель технологического процесса неизвестна, она может быть получена, по меньшей мере, двумя способами. Первый из них – на основе реализации активного эксперимента, в результате которого оцениваются значения коэффициентов уравнения регрессии, описывающего влияние входных переменных на выходные переменные. Последующее проведение процедур экспериментальной оптимизации позволяет получить описание стационарной области на основе расчета соответствующих коэффициентов уравнения регрессии  $a_i$  [51]:

$$a_i = c_1 \sum_{j=1}^N x^j y^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$a_i = c_2 [(x_{i-n}^j)^2 - \beta] y^j, \quad i = n + 1, \dots, 2n, \quad (12)$$

$$a_i = c_3 \sum_{j=1}^N x_{\mu}^j x_{\lambda}^j y^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mu \neq \lambda, \quad i = 2n + 1, \dots, k, \quad (13)$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y^j - \beta \sum_{j=1}^N a_{n+i}. \quad (14)$$

В формулах (11)–(14)  $c_1, c_2, c_3$  – коэффициенты для линейных, квадратичных и парных взаимосвязей соответственно,  $n$  – число линейных членов уравнения,  $N$  – число экспериментов,  $\beta$  – параметр, рассчитываемый в зависимости от числа точек ядра композиционного плана  $2^{n-p}$ , плеча «звездных» точек  $\alpha$  и числа точек плану по формуле

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^N (x_i^j)^2}{N} = \frac{2^{n-p} + \alpha}{N}. \quad (15)$$

Иллюстрация решения оптимизационной задачи в параметрическом виде (9) и получение на основании его мультиальтернативного описания конечного состояния приведена на рис. 11–13. На рис. 13 показан также принцип выбора конечного состояния, относительно которого следует искать оптимальное управление.

.....

В качестве конечного состояния предлагается использовать параметрическое описание вида

$$\begin{cases} x^*(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} a, \\ r(\lambda) = \sqrt{x^{*'} x^*}, \\ y^*(\lambda) = a_0 + 2a' x^* + x^{*'} A x^*, \end{cases} \quad (25)$$

где  $a_0$ ,  $a$ ,  $A$  – оценки коэффициентов в уравнении регрессии,  $x_i^* = \frac{a_i}{2\lambda}$  – субоптимальные значения входных переменных – в задачах поиска оптимального управления технологическими процессами – переменных состояния,  $r = \sqrt{r^2}$ ,  $r^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{2\lambda} \right)^2$  – ограничения в факторном пространстве,

$y^* = a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2\lambda}$  – субоптимальные значения выходной переменной.

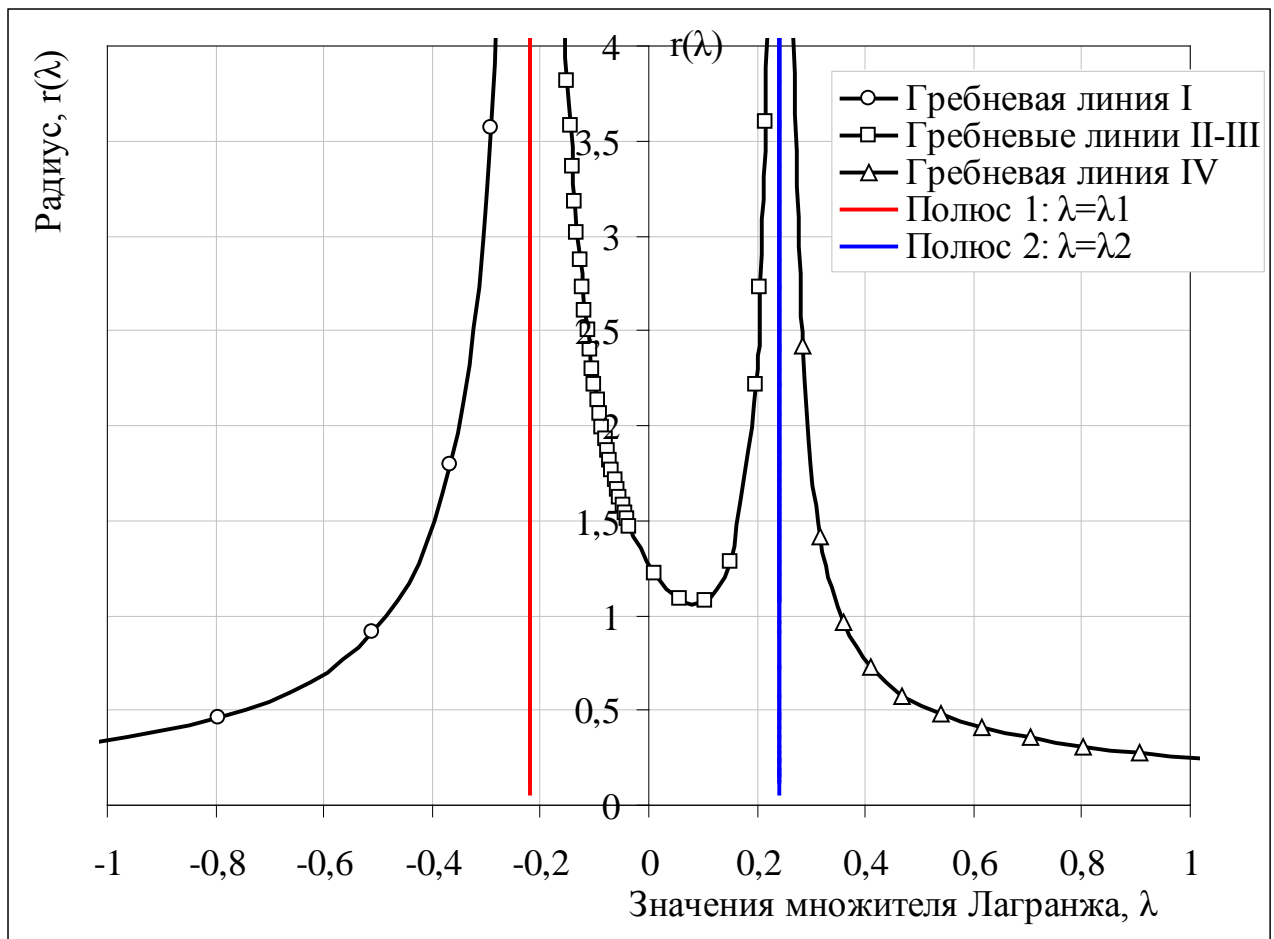


Рис. 11. Параметрическое описание ограничений

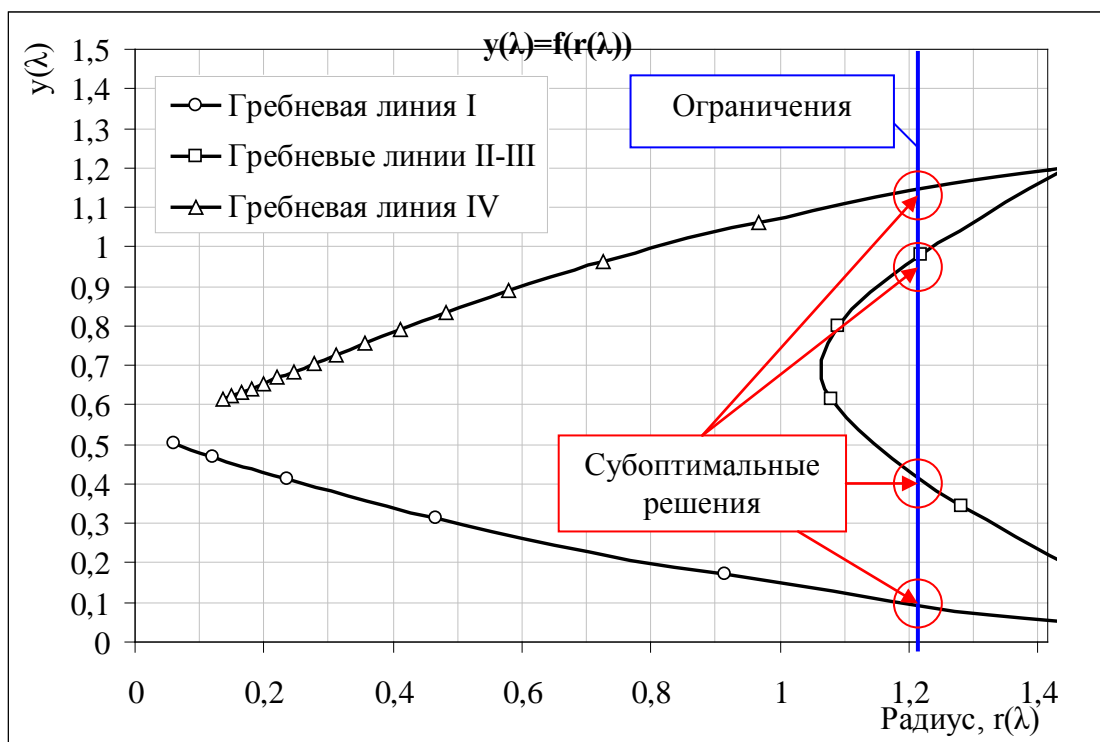


Рис. 12. Линии гребней – кривые, описывающие множество субоптимальных значений



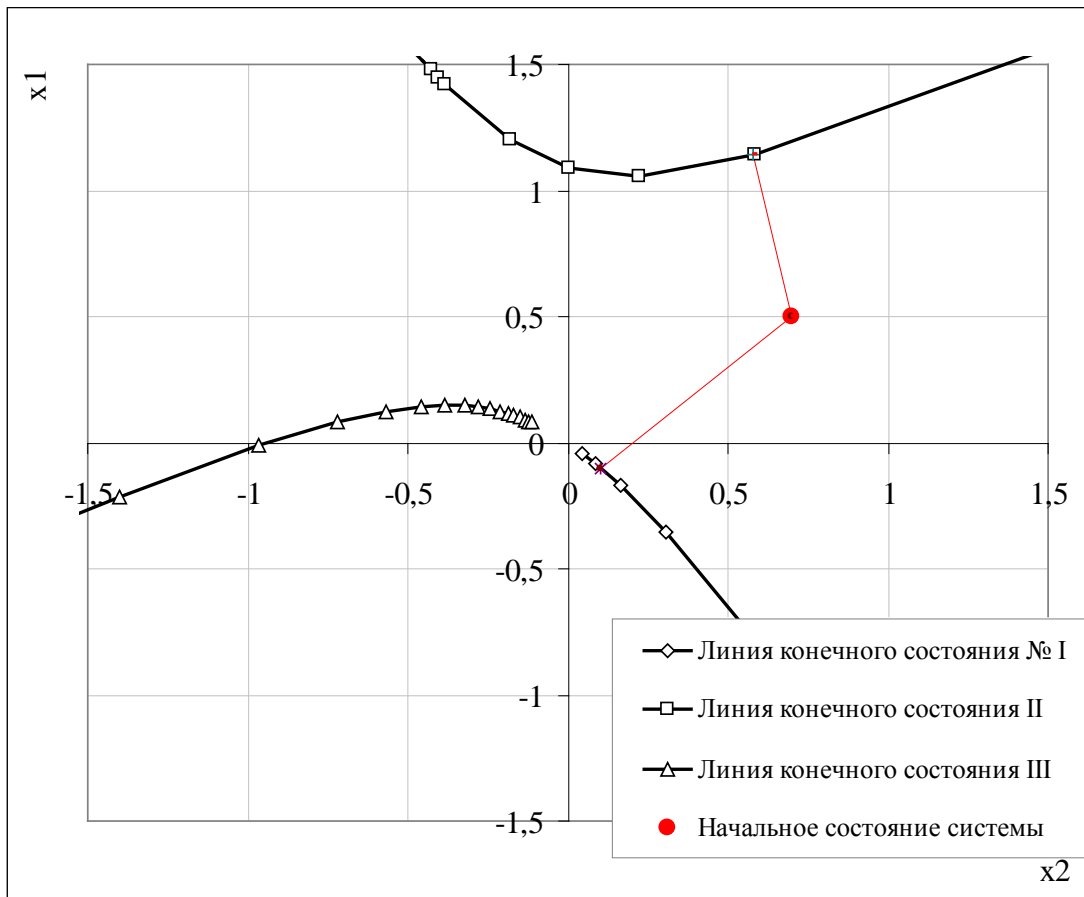


Рис. 13. Принцип мультиальтернативного описания конечного состояния и принцип выбора конечного состояния, относительно которого целесообразно вести поиск оптимального управления

Очевидно, поиск оптимального управления следует вести относительно ближайшей линии конечного состояния. При этом если линия представляет собой прямую, то расстояние может быть определено известным способом

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{1j} - x_{10})^2 + (x_{2j} - x_{20})^2}, \quad (10)$$

где  $x_{1j}, x_{2j}$  – координаты точек, лежащие на линии конечного состояния,  $x_{10}, x_{20}$  – координаты точки, описывающей начальное состояние.

Результаты численного моделирования приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты численного моделирования оптимальной траектории объекта управления при начальных условиях.... и наличии двухальтернативного описания конечного состояния


Алгоритм процедуры синтеза оптимального управления технологическим процессом при реализации предложенной процедуры мультиальтернативного описания конечного состояния представлен на рис. 14.

.....

Рис. 14. Алгоритм процедуры синтеза оптимального управления при таком мультиальтернативном описании конечного состояния

## **6. Интеграция полученных решений в двухуровневую АСУ ТП**

Задача программно-технической реализации АСУ ТП на основе результатов синтеза оптимального управления в условиях мультиальтернативного конечного состояния может быть решена на основе распределенной двухуровневой системы управления.

На нижнем уровне система решает задачу..... и включает в себя:

...

На верхнем уровне решается задача .... Для ее реализации системы могут быть использованы рекомендации, приведенные в работе [48]. В частности,

.....

Аппаратная часть информационно-управляющей системы включает в себя:

.....

На рис. 15 приведен пример структурной схемы распределенной двухуровневой системы управления технологическим процессом

.....

Рис. 15. Структурная схема распределенной двухуровневой системы управления технологическим процессом

Как следует из предложенного схемного решения, существует принципиальная возможность повышения надежности .... Это обусловлено использованием в ней....

## **7. Обсуждение результатов исследования метода синтеза оптимального управления, основанного на анализе математической модели объекта управления и мультиальтернативном описании конечного состояния**

**Полученные результаты** численного моделирования... (рис. 11–13) **свидетельствуют о том, что предложенная** процедура синтеза мультиальтернативного описания конечного состояния **позволяет.... Действительно, из рис. 12 видно, что** поиск субоптимальных решений базируется на определении точки пересечения кривых, описывающих.... Нахождение последних выполняется решением системы уравнений (25) и поэтому не представляет особых трудностей. **При этом следует отметить особо, что эффективность решений, понимаемых в смысле...., зависит от.... Это, в частности, можно видеть на рис. 4, 5, – кривые... располагаются**

преимущественно в диапазоне отрицательных значений входных переменных.... В свою очередь, из этого следует, что полученный результат объясняется снятием противоречия между необходимостью достижения высокого быстродействия и производительности. Последнее связано с решением задачи компромиссной оптимизации благодаря использованию метода... при получении мультиальтернативного описания конечного состояния. Именно поэтому предложенный вариант.... следует признать перспективным.

Предложенный метод поиска оптимального управления технологическими процессами, основанный на ... обладает тем преимуществом, что....

.....

Необходимо отметить, что предложенный метод поиска оптимального управления, основанный на ..., не учитывает такой важный критерий качества управления, как минимизация энергозатрат. Это приводит к тому, что .... Поэтому, данное обстоятельство свидетельствует об очевидном недостатке предложенного метода. Связанное с его устранением направление дальнейших исследований должно быть ориентировано на развитие процедуры адаптации метода динамического программирования. Такая адаптация должна дать возможность накладывать дополнительные ограничения на переменные состояния и управляющие воздействия.

## 8. Выводы

1. Предложенный метод поиска оптимального по быстродействию и конечному состоянию управления технологическими процессами, основанный на ..., позволяет при своей достаточной простоте получать решения, полностью согласующиеся с результатами, получаемые с применением принципа максимума Понтрягина. При этом он открывает дополнительные возможности в решении задачи ... . Показано, что для этого существует, по меньшей мере, два альтернативных варианта реализации управления, отличающиеся .... Определяющим фактором для выбора оптимального управления в данном случае является начальное состояние системы, описываемое положением точки фазового пространства, характеризующей фактическое начальное состояние, относительно линии конечного состояния.

2. Для получения мультиальтернативного описания конечного состояния эффективным является применение метода .... Получение при его реализации субоптимальных значений позволяет... Отличительной особенностью такого подхода является то, что снимается необходимость .... Данная особенность метода обеспечивает упрощение процедуры математического конструирования оптимального управления технологическими процессами, обладающими свойствами существенной инерционности. Это становится возможным благодаря использованию в предложенном методе... Подтверждение данного факта может быть найдено и в результатах численного моделирования, показавших, что....

3. Предложенный метод поиска оптимального управления может быть реализован в типовой схеме информационно-управляющих систем в структуре АСУ ТП. Для этого необходимо использовать модуль....., обеспечивающий

операцию.... Такой модуль может входить в состав программно-аппаратного комплекса на базе... **За счет ... обеспечивается** быстроедействие..., а за счет.... обеспечивается снижение инерционности. **Характерной особенностью таких схемных решений является** учет в структуре верхнего уровня компонентов....

## Благодарности

### Литература

1. Lutsenko, I. (2014). A practical approach to selecting optimal control criteria. *Technology audit and production reserves*, 2 (1 (16)), 32–35. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2014.23432>
2. Trufanov, I. D., Chumakov, K. I., Bondarenko, A. A. (2005). Obshcheteoreticheskie aspekty razrabotki stohasticheskoy sistemy avtomatizirovannoy ehkspertnoy ocenki dinamicheskogo kachestva proizvodstvennykh situatsiy ehlektrostaleplavleniya. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (2 (18)), 52–58.
3. Trufanov, I. D., Metel'skiy, V. P., Chumakov, K. I., Lozinskiy, O. Yu., Paranchuk, Ya. S. (2008). Ehnergosberegayushchee upravlenie ehlektrotehnologicheskim kompleksom kak baza povysheniya ehnergoehffektivnosti metallurgii stali. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (1 (36)), 22–29.
4. Lutsenko, I., Fomovskaya, E. (2015). Identification of target system operations. The practice of determining the optimal control. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies* 6, Issue 2 (78), 30–36. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.54432>
5. Lutsenko, I., Vihrova, E., Fomovskaya, E., Serdiuk, O. (2016). Development of the method for testing of efficiency criterion of models of simple target operations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (4 (80)), 42–50. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.66307>
6. Lutsenko, I. (2015). Identification of target system operations. development of global efficiency criterion of target operations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (2 (74)), 35–40. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.38963>
7. Lutsenko, I., Fomovskaya, E. (2015). Synthesis of cybernetic structure of optimal spooler. *Metallurgical and Mining Industry*, 9, 297–301.
8. Diligenskiy, N. V., Dymova, L. G., Sevast'yanov, P. V. (2004). Nechetkoe modelirovanie i mnogokriterial'naya optimizatsiya proizvodstvennykh sistem v usloviyakh neopredelennosti: tekhnologiya, ehkonomika, ehkologiya. Moscow: Mashinostroenie-1, 397.
9. Hong, D. H., Lee, S., Do, H. Y. (2001). Fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data using shape-preserving operations. *Fuzzy Sets and Systems*, 122 (3), 513–526. doi: [https://doi.org/10.1016/s0165-0114\(00\)00003-8](https://doi.org/10.1016/s0165-0114(00)00003-8)
10. Yang, M.-S., Lin, T.-S. (2002). Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input-output data. *Fuzzy Sets and Systems*, 126 (3), 389–399. doi: [https://doi.org/10.1016/s0165-0114\(01\)00066-5](https://doi.org/10.1016/s0165-0114(01)00066-5)

11. Seraya, O. V., Demin, D. A. (2012). Linear Regression Analysis of a Small Sample of Fuzzy Input Data. *Journal of Automation and Information Sciences*, 44 (7), 34–48. doi: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v44.i7.40>
12. Tseng, Y.-T., Ward, J. D. (2017). Comparison of objective functions for batch crystallization using a simple process model and Pontryagin's minimum principle. *Computers & Chemical Engineering*, 99, 271–279. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2017.01.017>
13. Demin, D. A. (2012). Synthesis process control elektrodugovoy smelting iron. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (10 (56)), 4–9. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3881/3557>
14. Demin, D. A. (2012). Synthesis of optimal temperature regulator of electroarc holding furnace bath. *Scientific Bulletin of National Mining University*, 6, 52–58.
15. Ozatay, E., Ozguner, U., Filev, D. (2017). Velocity profile optimization of on road vehicles: Pontryagin's Maximum Principle based approach. *Control Engineering Practice*, 61, 244–254. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2016.09.006>
16. Saerens, B., Van den Bulck, E. (2013). Calculation of the minimum-fuel driving control based on Pontryagin's maximum principle. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 24, 89–97. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trd.2013.05.004>
17. Bauer, S., Suchanek, A., Leon, F. P. (2014). Thermal and energy battery management optimization in electric vehicles using Pontryagin's maximum principle. *Journal of Power Sources*, 246, 808–818. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2013.08.020>
18. Onori, S., Tribioli, L. (2015). Adaptive Pontryagin's Minimum Principle supervisory controller design for the plug-in hybrid GM Chevrolet Volt. *Applied Energy*, 147, 224–234. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2015.01.021>
19. Fang, H., Wei, X., Zhao, F. (2015). Structural optimization of double-tube once-through steam generator using Pontryagin's Maximum Principle. *Progress in Nuclear Energy*, 78, 318–329. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2014.09.008>
20. Cândido, J. J., Justino, P. A. P. S. (2011). Modelling, control and Pontryagin Maximum Principle for a two-body wave energy device. *Renewable Energy*, 36 (5), 1545–1557. doi: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2010.11.013>
21. Krasovskiy, A. A., Taras'ev, A. M. (2007). Dinamicheskaya optimizaciya investitsiy v modelyah ehkonomicheskogo rosta. *Avtomatika i telemekhanika*, 10, 38–52.
22. Ohsawa, T. (2015). Contact geometry of the Pontryagin maximum principle. *Automatica*, 55, 1–5. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.02.015>
23. Blot, J., Koné, M. I. (2016). Pontryagin principle for a Mayer problem governed by a delay functional differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 444 (1), 192–209. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.027>

24. Pereira, F. L., Silva, G. N. (2011). A Maximum Principle for Constrained Infinite Horizon Dynamic Control Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44 (1), 10207–10212. doi: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-it-1002.03622>
25. Štecha, J., Rathouský, J. (2011). Stochastic maximum principle. *IFAC Proceedings Volumes*, 44 (1), 4714–4720. doi: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-it-1002.01501>
26. Arutyunov, A. V., Karamzin, D. Y., Pereira, F. (2012). Pontryagin's maximum principle for constrained impulsive control problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75 (3), 1045–1057. doi: <https://doi.org/10.1016/j.na.2011.04.047>
27. Khlopin, D. V. (2016). On the Hamiltonian in infinite horizon control problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 22 (4), 295–310. doi: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-4-295-310>
28. Ballestra, L. V. (2016). The spatial AK model and the Pontryagin maximum principle. *Journal of Mathematical Economics*, 67, 87–94. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2016.09.012>
29. Tregub, V. G., Chorna, Yu. O. (2010). Optimal control of batch processes with interphase transitions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (4 (48)), 10–12. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3270/3072>
30. Kocur, M. P. (2016). Mathematical modeling and optimization of transient thermoelectric cooling process. *Technology audit and production reserves*, 1 (2 (27)), 29–34. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2016.59320>
31. Levchuk, I. L. (2015). Managing the process of catalytic reforming by the optimal distribution of temperature at the reactor block inlets. *Technology audit and production reserves*, 2 (4 (22)), 56–60. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2015.40592>
32. Musaev, A. (2002). Intelligent Control Systems for Refinery Technological Processes. *Proceedings of conf. ICPI'02 (Intelligent computing for the petroleum industry)*. Vol. 2. Mexico, 6–17.
33. Musaev, A. A. (2003). Virtual'nye analizatory: koncepciya postroeniya i primeneniya v zadachah upravleniya nepreryvnymi tekhnologicheskimi processami. *Avtomatizaciya v promyshlennosti*, 8, 28–33.
34. Demin, D. A. (2011). Methodology of forming functional in the optimal control electric smelting. *Technology audit and production reserves*, 1 (1 (1)), 15–24. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2011.4082>
35. Musaev, A. A., Nikitin, V. A. (2007). Optimal'noe upravlenie processom smesheniya tovarnogo topliva v potoke. *Pribory i sistemy*, 4, 5–11.
36. Alekseeva, L. B.; Chernov, S. S. (Ed.) (2012). *Struktura vzaimodeystviya virtual'nogo monitoringa s sistemoy upravleniya nepreryvnym tekhnologicheskim processom*. I mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 114–118.
37. Afanas'ev, V. N., Kolmanovskiy, V. B., Nosov, V. R. (1989). *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya*. Moscow: Vysha Shkola, 447.

38. Demin, D. A. (2012). Synthesis process control elektrodugovoy smelting iron. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (10 (56)), 4–9. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3881/3557>
39. Demin, D. A. (2013). Adaptive modeling in problems of optimal control search termovremennoy cast iron. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (4 (66)), 31–37. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/19453/17110>
40. Demin, D. A. (2014). Mathematical description typification in the problems of synthesis of optimal controller of foundry technological parameters. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1 (4 (67)), 43–56. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.21203>
41. Horbiychuk, M. I. (1997). Sposib vidboru kryteriyiv optymal'nosti pry adaptivnomu upravlinni protsesom burinnya. *Rozvidka i rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch. Seriya: Tekhnichna kibernetika ta elektryfikatsiya ob'ektiv palyvno-enerhetychnoho kompleksu*, 34 (5), 18–23.
42. Horbiychuk, M. I. (1998). Adaptivne upravlinnya protsesom pohlyblennya sverdlovn. *Rozvidka i rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch. Seriya: Tekhnichna kibernetika ta elektryfikatsiya ob'ektiv palyvno-enerhetychnoho kompleksu*, 35 (6), 3–9.
43. Suzdal', V. S., Epifanov, Yu. M., Sobolev, A. V., Tavrovskiy, I. I. (2009). Parametricheskaya identifikatsiya Varmax modeley processa kristallizatsii krupnogabaritnykh monokristallov. *Naukovyi visnyk KUEITU*, 4 (26), 23–29.
44. Suzdal', V. S. (2011). Model reduction at synthesis of controllers for crystallization control. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (3 (50)), 31–34. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/1745/1642>
45. Suzdal', V. S. (2011). Optimization of synthesis control problem for crystallization processes. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (3 (54)), 41–44. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/2247/2051>
46. Zyelyk, Y. I., Lychak, M. M., Shevchenko, V. N. (2003). Simulation and Identification of Controlled Objects with the Use of the Interval-Set Analysis MATLAB Toolbox. *Journal of Automation and Information Sciences*, 35 (3), 31–44. doi: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v35.i3.40>
47. Zyelyk, Y. I. (2000). Convergence of a matrix gradient algorithm of solution of extremal problem under constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*, 32 (9), 34–41.
48. Zyelyk, Y. I. (2000). Convergence of a Matrix Gradient Control Algorithm with Feedback Under Constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*, 32 (10), 35–45. doi: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v32.i10.50>
49. Kachanov, P. A. (2000). Optimal'noe upravlenie sostoyaniem dinamicheskikh sistem v usloviyah neopredelennosti. *Kharkiv: KhGPU*, 209.
50. Raskin, L. G., Seraya, O. V. (2008). *Nechetkaya matematika: monogr.* Kharkiv: Parus, 352.
51. Hartman, K., Leckiy, E., Shefer, V. et. al. (1977). *Planirovanie ehksperimenta v issledovanii tekhnologicheskikh processov.* Moscow: Mir, 552.

52. Demin, D. A., Pelikh, V. F., Ponomarenko, O. I. (1998). Complex alloying of grey cast iron. *Liteynoe Proizvodstvo*, 10, 18–19.
53. Demin, D. A., Pelikh, V. F., Ponomarenko, O. I. (1995). Optimization of the method of adjustment of chemical composition of flake graphite iron. *Liteynoe Proizvodstvo*, 7-8, 42–43.
54. Mohanad, M. K., Kostyk, V., Domin, D., Kostyk, K. (2016). Modeling of the case depth and surface hardness of steel during ion nitriding. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (5 (80)), 45–49. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.65454>

## References

1. Lutsenko, I. (2014). A practical approach to selecting optimal control criteria. *Technology audit and production reserves*, 2 (1 (16)), 32–35. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2014.23432>
2. Trufanov, I. D., Chumakov, K. I., Bondarenko, A. A. (2005). Obshcheteoreticheskie aspekty razrabotki stohasticheskoy sistemy avtomatizirovannoy ehkspertnoy ocenki dinamicheskogo kachestva proizvodstvennykh situatsiy ehlektrostaleplavleniya. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (2 (18)), 52–58.
3. Trufanov, I. D., Metel'skiy, V. P., Chumakov, K. I., Lozinskiy, O. Yu., Paranchuk, Ya. S. (2008). Ehnergoberegayushchee upravlenie ehlektrotekhnologicheskimi kompleksami kak baza povysheniya ehnergoehffektivnosti metallurgii stali. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (1 (36)), 22–29.
4. Lutsenko, I., Fomovskaya, E. (2015). Identification of target system operations. The practice of determining the optimal control. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6, Issue 2 (78), 30–36. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.54432>
5. Lutsenko, I., Vihrova, E., Fomovskaya, E., Serdiuk, O. (2016). Development of the method for testing of efficiency criterion of models of simple target operations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (4 (80)), 42–50. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.66307>
6. Lutsenko, I. (2015). Identification of target system operations. development of global efficiency criterion of target operations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (2 (74)), 35–40. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.38963>
7. Lutsenko, I., Fomovskaya, E. (2015). Synthesis of cybernetic structure of optimal spooler. *Metallurgical and Mining Industry*, 9, 297–301.
8. Diligenskiy, N. V., Dymova, L. G., Sevast'yanov, P. V. (2004). Nechetkoe modelirovanie i mnogokriterial'naya optimizatsiya proizvodstvennykh sistem v usloviyah neopredelennosti: tekhnologiya, ehkonomika, ehkologiya. Moscow: Mashinostroenie-1, 397.
9. Hong, D. H., Lee, S., Do, H. Y. (2001). Fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data using shape-preserving operations. *Fuzzy Sets and Systems*, 122 (3), 513–526. doi: [https://doi.org/10.1016/s0165-0114\(00\)00003-8](https://doi.org/10.1016/s0165-0114(00)00003-8)



10. Yang, M.-S., Lin, T.-S. (2002). Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input–output data. *Fuzzy Sets and Systems*, 126 (3), 389–399. doi: [https://doi.org/10.1016/s0165-0114\(01\)00066-5](https://doi.org/10.1016/s0165-0114(01)00066-5)
11. Seraya, O. V., Demin, D. A. (2012). Linear Regression Analysis of a Small Sample of Fuzzy Input Data. *Journal of Automation and Information Sciences*, 44 (7), 34–48. doi: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v44.i7.40>
12. Tseng, Y.-T., Ward, J. D. (2017). Comparison of objective functions for batch crystallization using a simple process model and Pontryagin's minimum principle. *Computers & Chemical Engineering*, 99, 271–279. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2017.01.017>
13. Demin, D. A. (2012). Synthesis process control elektrodugovoy smelting iron. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (10 (56)), 4–9. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3881/3557>
14. Demin, D. A. (2012). Synthesis of optimal temperature regulator of electroarc holding furnace bath. *Scientific Bulletin of National Mining University*, 6, 52–58.
15. Ozatay, E., Ozguner, U., Filev, D. (2017). Velocity profile optimization of on road vehicles: Pontryagin's Maximum Principle based approach. *Control Engineering Practice*, 61, 244–254. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2016.09.006>
16. Saerens, B., Van den Bulck, E. (2013). Calculation of the minimum-fuel driving control based on Pontryagin's maximum principle. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 24, 89–97. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trd.2013.05.004>
17. Bauer, S., Suchanek, A., Leon, F. P. (2014). Thermal and energy battery management optimization in electric vehicles using Pontryagin's maximum principle. *Journal of Power Sources*, 246, 808–818. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2013.08.020>
18. Onori, S., Tribioli, L. (2015). Adaptive Pontryagin's Minimum Principle supervisory controller design for the plug-in hybrid GM Chevrolet Volt. *Applied Energy*, 147, 224–234. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2015.01.021>
19. Fang, H., Wei, X., Zhao, F. (2015). Structural optimization of double-tube once-through steam generator using Pontryagin's Maximum Principle. *Progress in Nuclear Energy*, 78, 318–329. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2014.09.008>
20. Cândido, J. J., Justino, P. A. P. S. (2011). Modelling, control and Pontryagin Maximum Principle for a two-body wave energy device. *Renewable Energy*, 36 (5), 1545–1557. doi: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2010.11.013>
21. Krasovskiy, A. A., Taras'ev, A. M. (2007). Dinamicheskaya optimizaciya investitsiy v modelyah ehkonomicheskogo rosta. *Avtomatika i telemekhanika*, 10, 38–52.
22. Ohsawa, T. (2015). Contact geometry of the Pontryagin maximum principle. *Automatica*, 55, 1–5. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.02.015>
23. Blot, J., Koné, M. I. (2016). Pontryagin principle for a Mayer problem governed by a delay functional differential equation. *Journal of Mathematical*

Analysis and Applications, 444 (1), 192–209. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.027>

24. Pereira, F. L., Silva, G. N. (2011). A Maximum Principle for Constrained Infinite Horizon Dynamic Control Systems. IFAC Proceedings Volumes, 44 (1), 10207–10212. doi: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-it-1002.03622>

25. Štecha, J., Rathouský, J. (2011). Stochastic maximum principle. IFAC Proceedings Volumes, 44 (1), 4714–4720. doi: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-it-1002.01501>

26. Arutyunov, A. V., Karamzin, D. Y., Pereira, F. (2012). Pontryagin's maximum principle for constrained impulsive control problems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 75 (3), 1045–1057. doi: <https://doi.org/10.1016/j.na.2011.04.047>

27. Khlopin, D. V. (2016). On the Hamiltonian in infinite horizon control problems. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 22 (4), 295–310. doi: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-4-295-310>

28. Ballestra, L. V. (2016). The spatial AK model and the Pontryagin maximum principle. Journal of Mathematical Economics, 67, 87–94. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2016.09.012>

29. Tregub, V. G., Chorna, Yu. O. (2010). Optimal control of batch processes with interphase transitions. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6 (4 (48)), 10–12. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3270/3072>

30. Kocur, M. P. (2016). Mathematical modeling and optimization of transient thermoelectric cooling process. Technology audit and production reserves, 1 (2 (27)), 29–34. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2016.59320>

31. Levchuk, I. L. (2015). Managing the process of catalytic reforming by the optimal distribution of temperature at the reactor block inlets. Technology audit and production reserves, 2 (4 (22)), 56–60. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2015.40592>

32. Musaev, A. (2002). Intelligent Control Systems for Refinery Technological Processes. Proceedings of conf. ICPI'02 (Intelligent computing for the petroleum industry). Vol. 2. Mexico, 6–17.

33. Musaev, A. A. (2003). Virtual'nye analizatory: koncepciya postroeniya i primeneniya v zadachah upravleniya nepreryvnymi tekhnologicheskimi processami. Avtomatizaciya v promyshlennosti, 8, 28–33.

34. Demin, D. A. (2011). Methodology of forming functional in the optimal control electric smelting. Technology audit and production reserves, 1 (1 (1)), 15–24. doi: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2011.4082>

35. Musaev, A. A., Nikitin, V. A. (2007). Optimal'noe upravlenie processom smesheniya tovarnogo topliva v potoke. Pribory i sistemy, 4, 5–11.

36. Alekseeva, L. B.; Chernov, S. S. (Ed.) (2012). Struktura vzaimodeystviya virtual'nogo monitoringa s sistemoy upravleniya nepreryvnym tekhnologicheskim processom. I mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 114–118.

37. Afanas'ev, V. N., Kolmanovskiy, V. B., Nosov, V. R. (1989). *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya*. Moscow: Vysha Shkola, 447.
38. Demin, D. A. (2012). Synthesis process control elektrodugovoy smelting iron. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (10 (56)), 4–9. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3881/3557>
39. Demin, D. A. (2013). Adaptive modeling in problems of optimal control search termovremennoy cast iron. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (4 (66)), 31–37. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/19453/17110>
40. Demin, D. A. (2014). Mathematical description typification in the problems of synthesis of optimal controller of foundry technological parameters. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1 (4 (67)), 43–56. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.21203>
41. Horbiychuk, M. I. (1997). Sposib vidboru kryteriyiv optymal'nosti pry adaptivnomu upravlinni protsesom burinnya. *Rozvidka i rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch. Seriya: Tekhnichna kibernetika ta elektryfikatsiya ob'yektiv palyvno-enerhetychnoho kompleksu*, 34 (5), 18–23.
42. Horbiychuk, M. I. (1998). Adaptivne upravlinnya protsesom pohlyblennya sverdlovin. *Rozvidka i rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch. Seriya: Tekhnichna kibernetika ta elektryfikatsiya ob'yektiv palyvno-enerhetychnoho kompleksu*, 35 (6), 3–9.
43. Suzdal', V. S., Epifanov, Yu. M., Sobolev, A. V., Tavrovskiy, I. I. (2009). Parametricheskaya identifikaciya Varmax modeley processa kristallizacii krupnogabaritnyh monokristallov. *Naukovyi visnyk KUEITU*, 4 (26), 23–29.
44. Suzdal', V. S. (2011). Model reduction at synthesis of controllers for crystallization control. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (3 (50)), 31–34. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/1745/1642>
45. Suzdal', V. S. (2011). Optimization of synthesis control problem for crystallization processes. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (3 (54)), 41–44. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/2247/2051>
46. Zyelyk, Y. I., Lychak, M. M., Shevchenko, V. N. (2003). Simulation and Identification of Controlled Objects with the Use of the Interval-Set Analysis MATLAB Toolbox. *Journal of Automation and Information Sciences*, 35 (3), 31–44. doi: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v35.i3.40>
47. Zyelyk, Y. I. (2000). Convergence of a matrix gradient algorithm of solution of extremal problem under constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*, 32 (9), 34–41.
48. Zyelyk, Y. I. (2000). Convergence of a Matrix Gradient Control Algorithm with Feedback Under Constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*, 32 (10), 35–45. doi: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v32.i10.50>
49. Kachanov, P. A. (2000). *Optimal'noe upravlenie sostoyaniem dinamicheskikh sistem v usloviyah neopredelennosti*. Kharkiv: KhGPU, 209.
50. Raskin, L. G., Seraya, O. V. (2008). *Nechetkaya matematika: monogr.* Kharkiv: Parus, 352.

51. Hartman, K., Leckiy, E., Shefer, V. et. al. (1977). Planirovanie ehksperimenta v issledovanii tekhnologicheskikh processov. Moscow: Mir, 552.
52. Demin, D. A., Pelikh, V. F., Ponomarenko, O. I. (1998). Complex alloying of grey cast iron. Liteynoe Proizvodstvo, 10, 18–19.
53. Demin, D. A., Pelikh, V. F., Ponomarenko, O. I. (1995). Optimization of the method of adjustment of chemical composition of flake graphite iron. Liteynoe Proizvodstvo, 7-8, 42–43.
54. Mohanad, M. K., Kostyk, V., Domin, D., Kostyk, K. (2016). Modeling of the case depth and surface hardness of steel during ion nitriding. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2 (5 (80)), 45–49. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.65454>

Демин Дмитрий Александрович  
Доктор технических наук, профессор  
Кафедра литейного производства  
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,  
ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002  
E-mail: [c7508990@gmail.com](mailto:c7508990@gmail.com)  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7946-3651>

Дьомін Дмитро Олександрович  
Доктор технічних наук, професор  
Кафедра ливарного виробництва  
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»  
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна, 61002  
E-mail: [c7508990@gmail.com](mailto:c7508990@gmail.com)  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7946-3651>

Demin Dmitriy  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Department of Foundry Production  
National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»  
Kyrpychova str., 2, Kharkiv, Ukraine, 61002  
E-mail: [c7508990@gmail.com](mailto:c7508990@gmail.com)  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7946-3651>